CORE
Metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
Provided by eaKirNTU (Electronic archive Kirovograd National Technical University)

Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка
Серія фізико-математичні науки

2011, 2

Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv
Series Physics & Mathematics

УДК 531.36:534.1:62-755

Філімоніхін Г.Б., д.т.н., професор
Пирогов В.В., асистент
Філімоніхіна І.І., к.ф.-м.н., старший викладач

Стійкість основних рухів ізольованої системи, складеної з обертового тіла і двох маятників

Першим методом Ляпунова досліджується стійкість основних рухів ізольованої механічної системи, складеної з обертового тіла, матеріальної точки, що створює його статичну незрівноваженість, та двох однакових математичних маятників, насаджених на поздовжню вісь тіла. Наближено визначені корені характеристичного рівняння та досліджений характер перехідних процесів.

Ключові слова: основний рух, ізольована система, маятник.

Filimonikhin H.B., Dt. Sci. (Engineering), Professor
Filimonikhin H.B., Dt. Sci. (Engineering), Professor
Pirogov V.V., Assistant Professor
Filimonikhina I.I., Cand. Sci. (Phys.-Math), Senior Lecturer

Stability of the main motion of the isolated system which consist of body and two pendulums

Is studied by the first method of Liapunov the stability of the main motions of the isolated mechanical system which consist of rotated body, of the immobile material point, which create statically unbalance, and two identical mathematical pendulums planted on the longitudinal axis of bearing body. The roots of characteristic equation are approximately determinate and is studied of character of transition of process.

Key words: main motion, isolated system, pendulum.

E-mail: fgb@online.ua, pirogovvv@rambler.ru, fii@online.ua
Статтю представив д. ф.-м. н., проф. Мелешко В.В.

1. Вступ

В роботі [4] одержані диференціальні рівняння руху ізольованої системи, складеної з обертового тіла, матеріальних точок, що створюють його незрівноваженість, та математичних маятників (куль, якщо їх вважати матеріальними точками), маси яких рухаються по колам з центром на повздовжній осі тіла. В роботі [5] досліджена стійкість основних рухів та характер перехідних процесів у випадку подібної ізольованої системи, складеної з осесиметричного тіла ($A = B \neq C$), матеріальної точки, що створює його статичну незрівноваженість і двох однакових математичних маятників. При цьому був застосований підхід, описаний у роботі [6], який став класичним при розв'язанні подібних задач [3]. В даній роботі аналогічні дослідження проводяться для ізольованої системи із роботи [5], у випадку неосесиметричного тіла ($A \neq B \neq C$).

2. Рівняння руху системи

Використаємо рівняння руху ізольованої системи, отримані в [3]. Вважаємо, що тіло – неосесиметричне ($A \neq B \neq C$), і його статичну незрівноваженість створює нерухома відносно нього матеріальна точка. Два однакових математичних маятника знаходяться у площині незрівноваженості ($h_j = d = h$, $/ j = 1,2 /$), і на них діють однакові сили опору ($H_j = H$, $/ j = 1,2 /$). Тоді рівняння руху приймають такий безрозмірний вигляд:

$$\tilde{b}_j = \varphi_j'' + \tilde{H}\varphi_j' + \eta'' \cos\varphi_j - \xi'' \sin\varphi_j +$$
$$+ \tilde{\Omega}_z'(1 + \xi\cos\varphi_j + \eta\sin\varphi_j) - (\zeta + R_h)\times$$
$$\times(\tilde{\Omega}_y' \sin\varphi_j + \tilde{\Omega}_x' \cos\varphi_j) + 2\tilde{\Omega}_z(\xi'\cos\varphi_j +$$
$$+ \eta'\sin\varphi_j) - \tilde{\Omega}_x^2(\eta + \sin\varphi_j)\cos\varphi_j +$$
$$+ \tilde{\Omega}_y^2(\xi + \cos\varphi_j)\sin\varphi_j - \tilde{\Omega}_z^2(\eta\cos\varphi_j -$$
$$- \xi\sin\varphi_j) - \tilde{\Omega}_x\tilde{\Omega}_y(\eta\sin\varphi_j - \xi\cos\varphi_j - \cos 2\varphi_j) -$$
$$- \tilde{\Omega}_z(\zeta + R_h)(\tilde{\Omega}_x \sin\varphi_j - \tilde{\Omega}_y\cos\varphi_j) = 0, / j = 1,2 /;$$
$$\tilde{b}_3 = \tilde{J}_{x_G}\tilde{\Omega}_x - \tilde{J}_{x_G y_G}\tilde{\Omega}_y - \tilde{J}_{x_G z_G}\tilde{\Omega}_z -$$
$$- R_m R_J(\zeta + R_h)\sum_{j=1}^{2}\varphi_j'\cos\varphi_j + \cos\alpha\sin\beta = 0,$$
$$\tilde{b}_4 = -\tilde{J}_{x_G y_G}\tilde{\Omega}_x + \tilde{J}_{y_G}\tilde{\Omega}_y - \tilde{J}_{y_G z_G}\tilde{\Omega}_z -$$

© Г.Б. Філімоніхін, В.В. Пирогов, І.І. Філімоніхіна, 2011

$$-R_J R_m(\zeta+R_h)\sum_{j=1}^{2}\varphi'_j\sin\varphi_j-\sin\alpha=0,$$
$$\tilde b_5=-\tilde J_{x_Gz_G}\tilde\Omega_x-\tilde J_{y_Gz_G}\tilde\Omega_y+\tilde J_{z_G}\tilde\Omega_z-\cos\alpha\cos\beta+$$
$$+R_mR_J\sum_{j=1}^{2}(\varphi'_j+\xi\varphi'_j\cos\varphi_j+\eta\varphi'_j\sin\varphi_j)=0,$$
$$\tilde b_6=\xi+R_m(2\tilde e_0\cos\gamma_0+\cos\varphi_1+\cos\varphi_2)=0,$$
$$\tilde b_7=\eta+R_m(2\tilde e_0\sin\gamma_0+\sin\varphi_1+\sin\varphi_2)=0,$$
$$\tilde b_8=\zeta+2R_mR_h\left(1+\frac{\tilde e_0}{R_e}\right)=0, \qquad (1)$$

де введені безрозмірні:
- змінні і час

$$\xi=\frac{x}{l},\quad \eta=\frac{y}{l},\quad \zeta=\frac{z}{l},\quad R_\omega=\frac{\omega}{\omega_0},$$
$$\tau=\omega_0 t,\quad \left(\frac{d\,\cdot}{dt}=\omega_0\frac{d\,\cdot}{d\tau}\right); \qquad (2)$$

- параметри

$$\tilde J_x=\frac{A+\mu(h^2+e_0^2\sin^2\gamma_0)+2mh^2}{C+\mu e_0^2+2ml^2},$$
$$\tilde J_y=\frac{B+\mu(h^2+e_0^2\cos^2\gamma_0)+2mh^2}{C+\mu e_0^2+2ml^2},$$
$$\tilde H=\frac{H}{ml^2\omega_0},\quad R_m=\frac{m}{M_\Sigma},\quad R_J=\frac{M_\Sigma l^2}{C+\mu e_0^2+2ml^2},$$
$$R_h=\frac{h}{l},\quad R_e=\frac{e_0}{l},\quad \tilde e_0=\frac{\mu e_0}{2ml}; \qquad (3)$$

- проекції кутової швидкості та прискорення

$$\tilde\Omega_x=\alpha'\cos\beta-R_\omega\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\tilde\Omega_y=\beta'+R_\omega\sin\alpha,$$
$$\tilde\Omega_z=\alpha'\sin\beta+R_\omega\cos\alpha\cos\beta,$$
$$\tilde\Omega'_x=\alpha''\cos\beta-\alpha'\beta'\sin\beta-R'_\omega\cos\alpha\sin\beta+$$
$$+\alpha' R_\omega\sin\alpha\sin\beta-\beta' R_\omega\cos\alpha\cos\beta,$$
$$\tilde\Omega'_y=\beta''+R'_\omega\sin\alpha+\alpha' R_\omega\cos\alpha,$$
$$\tilde\Omega'_z=\alpha''\sin\beta-\alpha'\beta'\cos\beta+R'_\omega\cos\alpha\cos\beta-$$
$$-\alpha' R_\omega\sin\alpha\cos\beta-\beta' R_\omega\cos\alpha\sin\beta; \qquad (4)$$

- осьові та відцентрові моменти інерції

$$\tilde J_{x_G}=\tilde J_x+R_mR_J\sum_{j=1}^{2}\sin^2\varphi_j-R_J(\eta^2+\zeta^2),$$
$$\tilde J_{y_G}=\tilde J_y+R_mR_J\sum_{j=1}^{2}\cos^2\varphi_j-R_J(\xi^2+\zeta^2),$$
$$\tilde J_{z_G}=1-R_J(\xi^2+\eta^2),$$
$$\tilde J_{x_Gy_G}=\left[\frac{R_m}{2}\left(2R_e\tilde e_0\sin 2\gamma_0+\sum_{j=1}^{2}\sin 2\varphi_j\right)-\xi\eta\right]R_J,$$
$$\tilde J_{x_Gz_G}=\left[R_mR_h\left(2\tilde e_0\cos\gamma_0+\sum_{j=1}^{2}\cos\varphi_j\right)-\xi\zeta\right]R_J,$$
$$\tilde J_{y_Gz_G}=\left[R_mR_h\left(2\tilde e_0\sin\gamma_0+\sum_{j=1}^{2}\sin\varphi_j\right)-\eta\zeta\right]R_J. \qquad (5)$$

З останнього рівняння системи (1) випливає, що $\zeta=\mathrm{const}$, тому ця координата і рівняння $\tilde b_8$ не впливатимуть на стійкість усталених рухів.

3. Основні рухи

На будь-якому усталеному русі безрозмірні координати φ_1, φ_2, α, β, ξ,η,ζ та кутова швидкість R_ω – сталі. На основному (усталеному) русі маятники усунули незрівноваженість і система обертається навколо поздовжньої осі тіла, тоді

$$\tilde\xi=0,\quad \tilde\eta=0,\quad \tilde\alpha=0,\quad \tilde\beta=0,$$
$$\tilde R_\omega,\tilde\varphi_1,\ \tilde\varphi_2-\mathrm{const}. \qquad (6)$$

Знайдемо відповідні положення маятників. З (6) з врахуванням та (1) одержуємо такі рівняння для визначення основних рухів

$$\tilde b_1,\ \tilde b_2\equiv 0,\ \tilde b_3=-\tilde J_{x_Gz_G}\tilde R_\omega=0,$$
$$\tilde b_4=-\tilde J_{y_Gz_G}\tilde R_\omega=0,\ \tilde b_5=\tilde R_\omega-1=0,$$
$$\tilde b_6=2\tilde e_0\cos\gamma_0+\cos\tilde\varphi_1+\cos\tilde\varphi_2=0,$$
$$\tilde b_7=2\tilde e_0\sin\gamma_0+\sin\tilde\varphi_1+\sin\tilde\varphi_2=0. \qquad (7)$$

З цієї системи одержуємо, що на основних рухах $\tilde R_\omega=1$. $\tilde J_{x_Gz_G},\tilde J_{y_Gz_G}=0$, коли дорівнюють нулю останні два рівняння, з яких отримуємо такі розв'язки.

1. Коли $\tilde e_0=0$ – незрівноваженість відсутня, то параметр γ_0 (напрям вектора незрівноваженості) втрачає свій зміст. Але замість нього треба ввести деякий параметр θ, який визначатиме певний рух із однопараметричної сім'ї основних рухів, що утворюється (рис. 1, а):

$$\tilde{\varphi}_1 = \frac{\pi}{2} + \theta, \ \tilde{\varphi}_2 = -\frac{\pi}{2} + \theta, \quad \theta \in [0, \pi). \qquad (8)$$

Зазначимо, що $\theta \in [0, \pi)$, бо для решти значень $\theta \in [\pi, 2\pi)$ можна отримати ті ж самі усталені рухи, лише змінюючи місцями маятники.

2. Коли $0 < \tilde{e}_0 < 1$ – незрівноваженість є і маятники можуть її усунути з певним запасом (рис. 1, б), розв'язок системи (7) має вигляд

$$\tilde{\varphi}_1 = \varphi_0 + \gamma_0, \ \tilde{\varphi}_2 = -\varphi_0 + \gamma_0, \ \gamma_0 \in [0, 2\pi), \qquad (9)$$

де

$$\varphi_0 = \pi - \arccos \tilde{e}_0, \ \varphi_0 \in (\pi/2, \ \pi). \qquad (10)$$

3. Коли $\tilde{e}_0 = 1$ – незрівноваженість найбільша, яку можуть усунути маятники (рис. 1, в), розв'язок системи (7) має вигляд

$$\tilde{\varphi}_1 = \pi + \gamma_0, \ \tilde{\varphi}_2 = -\pi + \gamma_0, \ \gamma_0 \in [0, 2\pi). \qquad (11)$$

Нижче досліджується стійкість основних рухів у випадках, коли $0 \le \tilde{e}_0 \le 1$.

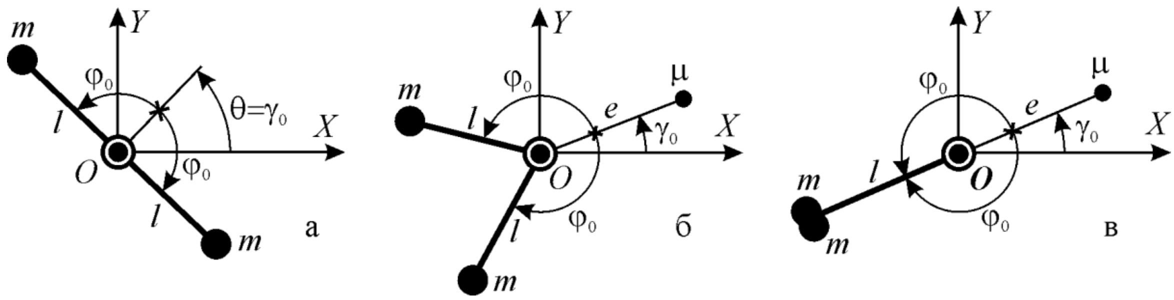

Рис. 1. Основні рухи системи

На основному русі безрозмірні осьові та відцентрові моменти інерції системи мають вигляд

$$\tilde{J}_{xG}^{(0)} = \tilde{J}_x + 2R_m R_J f - R_J \zeta^2,$$
$$\tilde{J}_{yG}^{(0)} = \tilde{J}_y + 2R_m R_J (1-f) - R_J \zeta^2, \ \tilde{J}_{zG}^{(0)} = 1,$$
$$\tilde{J}_{xGyG}^{(0)} = R_m R_J \sin 2\gamma_0 (R_e \tilde{e}_0 + \cos 2\varphi_0), \qquad (12)$$

де

$$f = (\cos^2 \varphi_0 - \cos 2\varphi_0 \cos^2 \gamma_0) =$$
$$= \tilde{e}_0^2 \sin^2 \gamma_0 + (1 - \tilde{e}_0^2) \cos^2 \gamma_0. \qquad (13)$$

Помноживши вирази (12) на $C + \mu e_0^2 + 2ml^2$, отримаємо осьові та відцентрові моменти інерції на основному русі у розмірному вигляді

$$\hat{J}_{xG} = A + \mu(h^2 + e_0^2 \sin^2 \gamma_0) +$$
$$+ 2m(h^2 + l^2 f) - M_\Sigma z^2,$$
$$\hat{J}_{yG} = B + \mu(h^2 + e_0^2 \cos^2 \gamma_0) +$$
$$+ 2m[h^2 + l^2(1-f)] - M_\Sigma z^2,$$
$$\hat{J}_{zG} = C_G = C + \mu e_0^2 + 2ml^2,$$
$$\hat{J}_{xGyG} = \frac{1}{2} \sin 2\gamma_0 (\mu e_0^2 + 2ml^2 \cos 2\varphi_0). \qquad (14)$$

Істотно, що параметр f залежить від незрівноваженості і в залежності від її величини і напрямку змінюється у межах $0 \le f \le 1$.

4. Лінеаризовані рівняння

Введемо у розглядання збурений рух:

$$\xi = u, \ \eta = v, \ \alpha = \alpha, \ \beta = \beta, \ R_\omega = 1 + p,$$
$$\varphi_1 = \varphi_0 + \gamma_0 + \alpha_1, \ \varphi_2 = -\varphi_0 + \gamma_0 + \alpha_2, \qquad (15)$$

де $u, v, \alpha, \beta, p, \alpha_1, \alpha_2$ – відхилення від незбуреного руху ($|u|, |v|, |\alpha|, |\beta|, |p|, |\alpha_1|, \ |\alpha_2| << 1$). Тоді лінеаризовані рівняння (1) матимуть вигляд

$$\tilde{b}_1 = \alpha_1'' + \tilde{H}\alpha_1' + p' - \zeta_h[(\alpha'' - 2\beta' - \alpha) \times$$
$$\times (\cos\varphi_0 \cos\gamma_0 - \sin\varphi_0 \sin\gamma_0) +$$
$$+ (\beta'' + 2\alpha' - \beta)(\sin\varphi_0 \cos\gamma_0 + \cos\varphi_0 \sin\gamma_0)] -$$
$$- (u'' - 2v' - u) \ (\sin\varphi_0 \cos\gamma_0 + \cos\varphi_0 \sin\gamma_0) +$$
$$+ (v'' + 2u' - v)(\cos\varphi_0 \cos\gamma_0 - \sin\varphi_0 \sin\gamma_0) = 0,$$
$$\tilde{b}_2 = \alpha_2'' + \tilde{H}\alpha_2' + p' - \zeta_h[(\alpha'' - 2\beta' - \alpha) \times$$
$$\times (\cos\varphi_0 \cos\gamma_0 + \sin\varphi_0 \sin\gamma_0) +$$
$$+ (\beta'' + 2\alpha' - \beta)(-\sin\varphi_0 \cos\gamma_0 + \cos\varphi_0 \sin\gamma_0)] -$$
$$- (u'' - 2v' - u) \ (-\sin\varphi_0 \cos\gamma_0 + \cos\varphi_0 \sin\gamma_0) +$$
$$+ (v'' + 2u' - v)(\cos\varphi_0 \cos\gamma_0 + \sin\varphi_0 \sin\gamma_0) = 0,$$
$$\tilde{b}_3 = \tilde{J}_A(\alpha' - \beta) - R_m \tilde{J}_{AB}(\beta' + \alpha) + \beta +$$
$$+ R_J[u\zeta + 2R_m R_h(\gamma_2 \sin\varphi_0 \cos\gamma_0 + \gamma_1 \cos\varphi_0 \sin\gamma_0)] -$$
$$- 2R_m R_J \zeta_h(\gamma_1' \cos\varphi_0 \cos\gamma_0 - \gamma_2' \sin\varphi_0 \sin\gamma_0) = 0,$$
$$\tilde{b}_4 = -R_m \tilde{J}_{AB}(\alpha' - \beta) + \tilde{J}_B(\beta' + \alpha) - \alpha +$$
$$+ R_J[v\zeta - 2R_m R_h(\gamma_1 \cos\varphi_0 \cos\gamma_0 - \gamma_2 \sin\varphi_0 \sin\gamma_0)] -$$
$$- 2R_J R_m \zeta_h(\gamma_2' \sin\varphi_0 \cos\gamma_0 + \gamma_1' \cos\varphi_0 \sin\gamma_0) = 0,$$
$$\tilde{b}_5 = p + 2R_m R_J \gamma_1' = 0,$$

$$\tilde{b}_6 = u - 2R_m(\gamma_2 \sin\varphi_0 \cos\gamma_0 + \gamma_1 \cos\varphi_0 \sin\gamma_0) = 0,$$
$$\tilde{b}_7 = v + 2R_m(\gamma_1 \cos\varphi_0 \cos\gamma_0 - \gamma_2 \sin\varphi_0 \sin\gamma_0) = 0, \quad (16)$$

де введені:

- нові змінні

$$\gamma_1 = (\alpha_1 + \alpha_2)/2, \quad \gamma_2 = (\alpha_1 - \alpha_2)/2; \quad (17)$$

- нові безрозмірні параметри

$$\tilde{J}_A = \tilde{J}^{(0)}_{x_G}, \quad \tilde{J}_B = \tilde{J}^{(0)}_{y_G},$$
$$\tilde{J}_{AB} = R_J \sin 2\gamma_0 (R_e \tilde{e}_0 + \cos 2\varphi_0), \; \zeta_h = \zeta + R_h. \quad (18)$$

Дослідимо умовну асимптотичну стійкість по частині змінних α, β, γ_1, γ_2 (за умови виконання законів збереження руху центра мас та моменту кількості руху розглядуваної системи). Використовуючи три останні рівняння із системи (16), виключимо з перших чотирьох рівнянь змінні u, v, p, отримаємо:

$$\tilde{b}_3 = \tilde{J}_A\alpha' - R_m\tilde{J}_{AB}\alpha - R_m\tilde{J}_{AB}\beta' + (1-\tilde{J}_A)\beta -$$
$$-2R_J R_m \zeta_h[(\gamma_1' \cos\gamma_0 - \gamma_1 \sin\gamma_0)\cos\varphi_0 -$$
$$-(\gamma_2' \sin\gamma_0 + \gamma_2 \cos\gamma_0)\sin\varphi_0] = 0,$$
$$\tilde{b}_4 = -R_m\tilde{J}_{AB}\alpha' - (1-\tilde{J}_B)\alpha + \tilde{J}_B\beta' + R_m\tilde{J}_{AB}\beta -$$
$$-2R_J R_m \zeta_h[(\gamma_1' \sin\gamma_0 + \gamma_1 \cos\gamma_0)\cos\varphi_0 +$$
$$+(\gamma_2' \cos\gamma_0 - \gamma_2 \sin\gamma_0)\sin\varphi_0] = 0,$$
$$L_1 = (\tilde{b}_1 + \tilde{b}_2)/2 = -\zeta_h \cos\varphi_0(\alpha'' \cos\gamma_0 + 2\alpha' \sin\gamma_0 -$$
$$-\alpha\cos\gamma_0 + \beta'' \sin\gamma_0 - 2\beta' \cos\gamma_0 - \beta \sin\gamma_0) +$$
$$+(-2R_m R_J - 2R_m \cos^2\varphi_0)\gamma_1'' + \tilde{H}\gamma_1' +$$
$$+2R_m \cos^2\varphi_0 \gamma_1 + 2R_m \sin 2\varphi_0 \gamma_2' = 0,$$
$$L_2 = (\tilde{b}_1 - \tilde{b}_2)/2 = \zeta_h \sin\varphi_0(\alpha'' \sin\gamma_0 - 2\alpha' \cos\gamma_0 -$$
$$-\alpha\sin\gamma_0 - \beta'' \cos\gamma_0 - 2\beta' \sin\gamma_0 + \beta\cos\gamma_0) -$$
$$-2R_m \sin 2\varphi_0 \gamma_1' + (-2R_m \sin^2\varphi_0)\gamma_2'' +$$
$$+\tilde{H}\gamma_2' + 2R_m \sin^2\varphi_0 \gamma_2 = 0. \quad (19)$$

5. Характеристичне рівняння та необхідні умови стійкості основних рухів

Характеристичне рівняння системи (19) має вигляд поліному

$$\Delta(\lambda) = a_6\lambda^6 + a_5\lambda^5 + ... + a_1\lambda + a_0 = 0, \quad (20)$$

де

$$a_0 = a_0^{(2)} R_m^2 + a_0^{(4)} R_m^4, \; a_1 = a_1^{(1)} R_m + a_1^{(2)} R_m^2 + a_1^{(3)} R_m^3,$$
$$a_i = a_i^{(0)} + a_i^{(1)} R_m + a_i^{(2)} R_m^2 + a_i^{(3)} R_m^3 + a_i^{(4)} R_m^4,$$
$$a_j = a_j^{(0)} + a_j^{(1)} R_m + a_j^{(2)} R_m^2 + a_j^{(3)} R_m^3,$$
$$/\, i = 2,4,6; \; j = 3,5\,/, \quad (21)$$

і коефіцієнти:

- при R_m^0

$$a_6^{(0)} = \tilde{J}_A\tilde{J}_B, \; a_5^{(0)} = 2\tilde{H}\tilde{J}_A\tilde{J}_B, \; a_4^{(0)} = \tilde{H}^2\tilde{J}_A\tilde{J}_B +$$
$$+(1-\tilde{J}_A)(1-\tilde{J}_B), \; a_3^{(0)} = 2\tilde{H}(1-\tilde{J}_A)(1-\tilde{J}_B),$$
$$a_2^{(0)} = \tilde{H}^2(1-\tilde{J}_A)(1-\tilde{J}_B);$$

- при R_m

$$a_6^{(1)} = -2\left\langle \tilde{J}_A\tilde{J}_B + R_J\{\tilde{J}_A\tilde{J}_B + \zeta_h^2[\tilde{J}_A f + \tilde{J}_B(1-f)]\}\right\rangle,$$
$$a_5^{(1)} = \tilde{H}a_6^{(1)}, \; a_4^{(1)} = -2\{1 - \tilde{J}_A - \tilde{J}_B + R_J[(1-\tilde{J}_A)(1-\tilde{J}_B) -$$
$$-3\zeta_h^2 - \zeta_h^2(\tilde{J}_A + \tilde{J}_B)(2\tilde{e}_0^2 - 1)\cos 2\gamma_0]\}, \; a_3^{(1)} = \tilde{H}a_4^{(1)},$$
$$a_2^{(1)} = 2[(1-f)(1-\tilde{J}_A)(1-\tilde{J}_B - R_J\zeta_h^2) +$$
$$+f(1-\tilde{J}_B)(1-\tilde{J}_A - R_J\zeta_h^2)], \; a_1^{(1)} = \tilde{H}a_2^{(1)};$$

- при R_m^2

$$a_6^{(2)} = 4\tilde{J}_A\tilde{J}_B\tilde{e}_0^2(1-\tilde{e}_0^2) - \tilde{J}_{AB}^2 + R_J\{4\tilde{J}_A\tilde{J}_B(1-\tilde{e}_0^2) +$$
$$+\zeta_h^2[4(\tilde{J}_A + \tilde{J}_B)\tilde{e}_0^2(1-\tilde{e}_0^2) - 2\tilde{J}_{AB}\sin 2\gamma_0(2\tilde{e}_0^2 - 1)]\} +$$
$$+R_J^2\zeta_h^2(1-\tilde{e}_0^2)[4\zeta_h^2\tilde{e}_0^2 + 4(\tilde{J}_A\cos^2\gamma_0 + \tilde{J}_B\sin^2\gamma_0)],$$
$$a_5^{(2)} = -2\tilde{H}\tilde{J}_{AB}[\tilde{J}_{AB} + R_J\zeta_h^2\sin 2\gamma_0(2\tilde{e}_0^2 - 1)],$$
$$a_4^{(2)} = -\tilde{J}_{AB}^2(1+\tilde{H}^2) + 4\tilde{e}_0^2(1-\tilde{e}_0^2)(1-\tilde{J}_A)(1-\tilde{J}_B) +$$
$$+R_J\{4(1-\tilde{e}_0^2)(1-\tilde{J}_A - \tilde{J}_B) + 4\zeta_h^2[\tilde{e}_0^2(1-\tilde{e}_0^2)\times$$
$$\times(3\tilde{J}_A + 3\tilde{J}_B - 2) - \tilde{J}_{AB}\sin 2\gamma_0(2\tilde{e}_0^2 - 1)]\} +$$
$$+4R_J^2\zeta_h^2(1-\tilde{e}_0^2)\,[3\zeta_h^2\tilde{e}_0^2 + (\tilde{J}_A\cos 2\gamma_0 - \tilde{J}_B\cos 2\gamma_0 - 3)],$$
$$a_3^{(2)} = -2\tilde{H}\tilde{J}_{AB}[\tilde{J}_{AB} + 2R_J\zeta_h^2\sin 2\gamma_0(2\tilde{e}_0^2 - 1)],$$
$$a_2^{(2)} = -\tilde{H}^2\tilde{J}_{AB}^2 + 4\tilde{e}_0^2(1-\tilde{e}_0^2)(2 - 2\tilde{J}_A - 2\tilde{J}_B + 3\tilde{J}_A\tilde{J}_B) -$$
$$-R_J\{4(1-\tilde{J}_A - \tilde{J}_B)(1-\tilde{e}_0^2) - 2\zeta_h^2[2\tilde{e}_0^2(1-\tilde{e}_0^2)\times$$
$$\times(3\tilde{J}_A + 3\tilde{J}_B - 4) - \tilde{J}_{AB}\sin 2\gamma_0(2\tilde{e}_0^2 - 1)]\} +$$
$$+4R_J^2\zeta_h^2(1-\tilde{e}_0^2)[3\zeta_h^2\tilde{e}_0^2 + (1 - \tilde{J}_A\sin^2\gamma_0 - \tilde{J}_B\cos^2\gamma_0)],$$
$$a_1^{(2)} = -2\tilde{H}R_J\tilde{J}_{AB}\zeta_h^2\sin 2\gamma_0(2\tilde{e}_0^2 - 1),$$
$$a_0^{(2)} = 4\tilde{e}_0^2(1-\tilde{e}_0^2)(1-\tilde{J}_A - R_J\zeta_h^2)(1-\tilde{J}_B - R_J\zeta_h^2);$$

- при R_m^3

$$a_6^{(3)} = 2\tilde{J}_{AB}[\tilde{J}_{AB} + R_J\tilde{J}_{AB} - 2R_J^2\zeta_h^2\sin 2\gamma_0(1-\tilde{e}_0^2)],$$
$$a_5^{(3)} = 2\tilde{J}_{AB}^2(1+R_J); \; a_4^{(3)} = 2R_J\tilde{J}_{AB}[\tilde{J}_{AB} -$$
$$-4R_J\zeta_h^2\sin 2\gamma_0(1-\tilde{e}_0^2)], \; a_3^{(3)} = 2\tilde{H}R_J\tilde{J}_{AB}^2,$$
$$a_2^{(3)} = -2\tilde{J}_{AB}[\tilde{J}_{AB} + 2R_J^2\zeta_h^2\sin 2\gamma_0(1-\tilde{e}_0^2)], \; a_1^{(3)} = -2\tilde{H}\tilde{J}_{AB}^2;$$

- при R_m^4

$$a_6^{(4)} = -4\tilde{J}_{AB}^2(\tilde{e}_0^2 + R_J)(1-\tilde{e}_0^2), \; a_4^{(4)} = -12\tilde{J}_{AB}^2\tilde{e}_0^2(1-\tilde{e}_0^2),$$

$$a_2^{(4)} = -4\tilde{J}_{AB}^2(1-\tilde{e}_0^2)[3\tilde{e}_0^2 - R_J],$$
$$a_0^{(4)} = -4\tilde{J}_{AB}^2\tilde{e}_0^2(1-\tilde{e}_0^2). \quad (22)$$

За теоремою Ляпунова про стійкість руху за першим наближенням, основні рухи (умовно) асимптотично стійкі, коли [1]

$$\mathrm{Re}(\lambda_i) < 0, \quad /i = \overline{1,6}/. \quad (23)$$

Необхідні умови асимптотичної стійкості основних рухів мають вигляд

$$a_6 > 0, \ \ a_5 > 0, \dots, a_1 > 0, \ \ a_0 > 0. \quad (24)$$

З (20)-(22) видно, що випадки відсутності ($\tilde{e}_0 = 0$) та максимальної ($\tilde{e}_0 = 1$) незрівноваженості є критичними за Ляпуновим випадками одного нульового кореня і потребують окремого дослідження.

У загальному випадку отримання коренів поліному (20), аналіз його коефіцієнтів та умов критерію Рауса-Гурвіца аналітично здійснити неможливо. Тому проведемо дослідження у випадку, коли маса маятників набагато менша маси системи, тобто $R_m << 1$.

Головні складові коефіцієнтів a_i поліному (20) та умови (24) дають такі необхідні умови стійкості:

$$1 - \tilde{J}_A - R_J\zeta_h^2 > 0, \ 1 - \tilde{J}_B - R_J\zeta_h^2 > 0, \ (\text{а})$$
$$1 - \tilde{J}_A - R_J\zeta_h^2 < 0, \ 1 - \tilde{J}_B - R_J\zeta_h^2 < 0. \ (\text{б}) \quad (25)$$

Ці умови більш жорсткі ніж умови, що складене тіло повинно бути витягнутим ($1 < \tilde{J}_A, 1 < \tilde{J}_B$) чи сплюснутим ($1 > \tilde{J}_A, 1 > \tilde{J}_B$). Тому домовимося надалі використовувати терміни більш ніж сплюснуте тіло – умови (25, а), більш ніж витягнуте тіло – умови (25, б).

6. Наближене визначення коренів характеристичного рівняння у випадку, коли $0 < \tilde{e}_0 < 1$, достатні умови асимптотичної стійкості

Застосовуємо метод розкладання коренів поліному за степенями малого параметра [2]. У випадку, коли $R_m << 1$ корені характеристичного рівняння (20) мають такі розкладання:

$$\lambda_{1,2} \approx -\tilde{H}, \quad \lambda_{3,4} \approx \pm ik - \frac{R_m R_J \zeta_h^2 (a + bf)(\tilde{H} \mp ik)}{c\tilde{J}_A\tilde{J}_B(1-\tilde{J}_A)(1-\tilde{J}_B)},$$

$$\lambda_{5,6} \approx \frac{-R_m\left[a_1^{(1)} \pm \sqrt{(a_1^{(1)})^2 - 4a_2^{(0)}a_0^{(2)}}\right]}{2a_2^{(0)}}. \quad (26)$$

де

$$k = \sqrt{(1-\tilde{J}_A)(1-\tilde{J}_B)\tilde{J}_A^{-1}\tilde{J}_B^{-1}},$$
$$a = \tilde{J}_B(1-\tilde{J}_A)(1+\tilde{J}_A-\tilde{J}_B)^2, \ b = (\tilde{J}_A-\tilde{J}_B)(1-\tilde{J}_A-\tilde{J}_B)^2,$$
$$c = [\tilde{H}^2\tilde{J}_A\tilde{J}_B + (1-\tilde{J}_A)(1-\tilde{J}_B)]. \quad (27)$$

Дійсні частини цих коренів будуть від'ємні тільки у випадку більш ніж сплюснутого тіла, тобто при виконанні умов (25, а).

Отже, з коренів (26) характеристичного рівняння (20), та з умов (25, а) видно, що:

- за одночасного виконання умов (25,а), основний рух умовно асимптотично стійкий, а перехідні процеси – коливально-затухаючі;
- величина безрозмірного коефіцієнту тертя $\tilde{H}$ впливає лише на швидкість затухання перехідних процесів, але не на стійкість.

Проаналізуємо більш докладно умови (25, а). При цьому будемо вважати, що маса розглядуваної ізольованої системи при зміні незрівноваженості не змінюється і тому, з врахуванням (3), $\mu = \mathrm{const} \neq 0$ і $\tilde{e}_0 = 0$ тільки у випадку, коли $e_0 = 0$. Для того, щоб основні рухи були умовно асимптотично стійкі для будь-якого $0 < \tilde{e}_0 < 1$ достатньо, щоб ці умови виконувалися у найбільш жорстких - граничних випадках (рис. 2):

1) $\tilde{e}_0 = 0$ ($\varphi_{01} = \pi/2$), $\gamma_{01} = 0$ (рис. 2, а);
2) $\tilde{e}_0 = 1$ ($\varphi_{02} = \pi$), $\gamma_{02} = \pi/2$ (рис. 2, б);
3) $\tilde{e}_0 = 0$ ($\varphi_{03} = \pi/2$), $\gamma_{03} = \pi/2$ (рис. 2, в);
4) $\tilde{e}_0 = 1$ ($\varphi_{04} = \pi$), $\gamma_{04} = 0$ (рис. 2, г);

Відміна випадків полягає в тому, що у випадках 1, 2 маятники розташовуються на осі Y (рис. 2, а, б відповідно), а у випадках 3, 4 – на осі X (рис. 2, в, г відповідно).

У граничних випадках тензор інерції системи – головний центральний і має вигляд:

$$\hat{\mathbf{J}}_{Gi} = \begin{pmatrix} A_{Gi} & 0 & 0 \\ 0 & B_{Gi} & 0 \\ 0 & 0 & C_G \end{pmatrix}, \ /i = \overline{1,4}/, \quad (28)$$

де $\hat{J}_{x_{Gi}} = A_{Gi}$, $\hat{J}_{y_{Gi}} = B_{Gi}$, $\hat{J}_{z_G} = C_G$ - головні центральні моменти інерції системи (відносно осей X_G, Y_G, Z_G) на i-му граничному основному русі. Враховуючи (14), матимемо:

$$A_{G1} = A + \mu h^2 + 2m(h^2 + l^2) - M_\Sigma z^2,$$

$$A_{G2}=A_{G1}+\mu e_0^2\,,\;\; A_{Gi}=A_{G1}-2ml^2\,,\;\; /\,i=3{,}4\,/;\qquad B_{Gj}=B+h^2(\mu+2m)-M_\Sigma z^2\,,\;\; /\,j=1{,}2\,/\,,\qquad B_{G3}=B_{Gj}+2ml^2\,,\;\; B_{G4}=B_{G3}+\mu e_0^2\,. \quad (29)$$

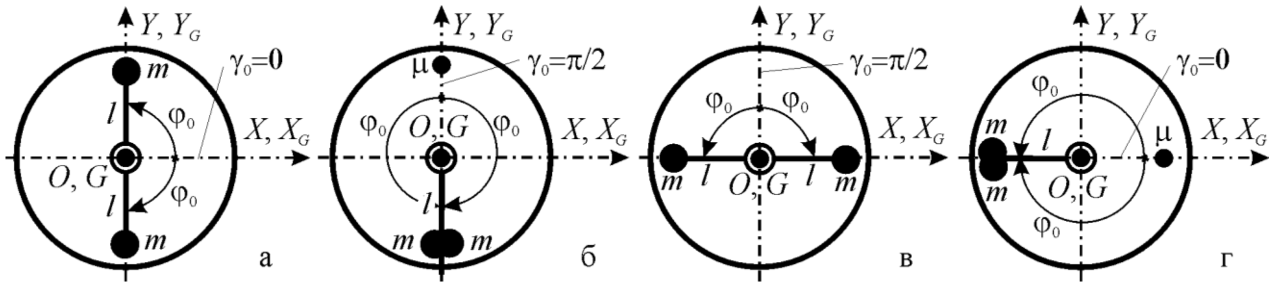

Рис. 2 Положення маятників на основних рухах в граничних випадках

Зазначимо, що безрозмірні параметри $\tilde{J}_A$, $\tilde{J}_B$, враховуючи (18) та граничні випадки, можна представити так:

$$\tilde{J}_{Ai}=A_{Gi}/C_G\,,\;\; \tilde{J}_{Bi}=B_{Gi}/C_G\,,\;\; i=/\overline{1{,}4}/\,. \quad (30)$$

Тоді дійсні частини коренів λ_{1-5} характеристичного рівняння (20) будуть від'ємні при одночасному виконанні умов

$$C_G-A_{Gi}-M_\Sigma h_z^2>0\,,\; C_G-B_{Gi}-M_\Sigma h_z^2>0\,,\; /i=\overline{1{,}4}/\,. \quad (31)$$

де $h_z=h+z$. Зазначимо, що умови (31), отримані в граничних випадках, еквівалентні умовам, які були отримані в роботі [7], але для даної задачі є можливість конкретизувати ці умови. У явному вигляді відносно параметрів системи, в найбільш небезпечних критичних випадках, коли A_{Gi} та B_{Gi} досягають найбільших значень, умови (31), з врахуванням (14) та (29), матимуть вигляд:

$$C-A-h^2(\mu+2m)-M_\Sigma h(h+2z)>0\,,$$
$$C-B-h^2(\mu+2m)-M_\Sigma h(h+2z)>0\,. \quad (32)$$

Висновки. В результаті досліджень у випадку, коли маса маятників (куль) набагато менша маси системи отримано, що:

1) основні рухи системи умовно асимптотично стійки тільки у випадку більш ніж сплюснутого тіла, коли $0<e_0<1$;

2) перехідні процеси системи носять коливально-затухаючий характер;

3) випадки відсутності та максимальної незрівноваженості є критичними за Ляпуновим випадками одного нульового кореня і потребують подальших досліджень.

Список використаних джерел

1. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения / Д.Р. Меркин – М.: Наука, 1987. – 304 с.
2. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений: Пер. с англ. / А. Найфэ – М.: Мир, 1984. – 535 с.
3. Горошко О.О. Стабілізація положення осі обертання абсолютно твердого тіла багатомаятниковим (багатокульовим) автобалансиром / О.О. Горошко, Г.Б. Філімоніхін, В.В. Пирогов, І.І. Філімоніхіна // Вісник Київського ун-ту. Серія: фізико-матем. науки. - №4, 2005. С. 67-76.
4. *Філімоніхін Г. Б.* Рівняння руху ізольованої системи, яка здійснює просторовий рух / *Г.Б. Філімоніхін, В.В. Пирогов, І.І. Філімоніхіна* // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. 2007. - №4. –С. 94-100.
5. *Пирогов В. В.* Стійкість основного руху статично незрівноваженого обертового тіла із двома маятниками (кулями) / *В.В. Пирогов* // Вісник Київського ун-ту. Серія: фіз.-мат. науки. –2008. – №3. – С. 89-94.
6. *Мирер С.А.* Оптимальные параметры спутника, стабилизируемого вращением, с демпфером маятникового типа / *С.А. Мирер, В.А. Сарычев* // Космические исследования. – 1997. – **35**. № 6. – С. 651-658.
7. *Филимонихина И. И.* Условия уравновешивания автобалансирами вращающегося тела в изолированной системе / *И.И. Филимонихина, Г.Б. Филимонихин* // Прикладная механика. – 2007. – **43**, №11. – С.113-120.

Надійшла до редколегії 16.04.11